MATEMÁTICA

9º ANO

MATEMÁTICA 9º ano

- Números reais e operações com radicais
- Cálculos algébricos
- Equações
- Triângulos
- Polígonos
- Estatística e probabilidade
- Funções

1ª edição

MARCELO F BATISTA
Organizador

azup

MATEMÁTICA
9º ANO
AZUP

Marcelo F Batista
Organizador

https://azup.com.br/

Título: *Matemática 9º ano Azup*

Professora: Ângela Maria Ferreira de O Lourdes
Diagramador: Carlos Batista
Organizador: Marcelo F Batista

Vale das Palmeiras, 10 - Tororó – Brasília/DF – CEP 71684-370
E-mail: azup@azup.com.br
https://azup.com.br/

https://azup.com.br/

https://azup.com.br/

https://azup.com.br/

SUMÁRIO

1

Números reais e operações com radicais

- Potenciação E Suas Propriedades
- Raiz quadrada e cúbica com números racionais
- Potência de expoente racional
- Transformação de radicais em potências
- Adição e subtração com radicais
- Multiplicação e divisão de radicais
- Potencia de raiz

1.1. POTENCIAÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

Expressa o mesmo número sendo multiplicado diversas vezes. Veja o exemplo: $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

Nesse caso, tem-se uma base e o expoente, no nosso exemplo a base foi 5 e expoente foi 2. Podemos expressa-la da seguinte forma:

$\mathbf{a}^{\mathbf{n}}$ → número de fatores

fator que se repete ↵

Vamos ver alguns exemplos: $3 \times 3 = 3^2 = 9$

Para essa situação, temos: dois (3) é a base, três (2) é o expoente e o resultado da operação, oito (9), é a potência.

Propriedades da potenciação

1. Produto de potências de mesma base: repete-se a base e somam-se os expoentes.

Exemplo: $2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$

2. Divisão de potências de mesma base: repete-se a base e subtraem-se os expoentes.

Exemplo: $2^4 \div 2^5 = 2^{4-5} = 2^{-1}$

3. Potência de potência: mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(2^4)^5 = 2^{4 \times 5} = 2^{20}$

- Distributiva em relação à multiplicação: multiplicam-se as bases e mantém-se o expoente.

Exemplo: $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4 = 1296$

- Distributiva em relação à divisão: dividem-se as bases e mantém-se o expoente.

Exemplo: $2^4 \div 3^4 = (2 \div 3)^4 = 4/9$

1.1.1. Exercício de Potenciação

1. Calcule $\frac{x^2y^2-x^3y^3}{y^2-x^2}$, para x = 0,5 e y = 1,5

2. Calcule colocando na forma decimal:

a) 10^3
b) 10^5
c) 10^{-2}
d) 10^{-6}

3. Calcule as potências em cada item:

a) 5^3
b) $(-4)^3$
c) $(0{,}25)^2$
d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

4. Calcule as expressões:

a) $(0{,}25)^2 - (0{,}5)^3$
b) $(0{,}333..)^2 + (0{,}333)^4$
c) $(7 - 5{,}5)^2$
d) $(2^2 + 2^{-2})^2$

5. Obtenha o resultado de :

e) $(2{,}5010^2)\ (4{,}0010^9)$
f) $(3{,}6010^{-4})\ (5{,}5010^{-5})$
g) $(1{,}2010^8)\ (8{,}2010^{-5})$

h) $(4{,}0010^{15}) \div (8{,}0010^{10})$

GABARITO

QUESTÃO 1	QUESTÃO 2	QUESTÃO 3	QUESTÃO 4	QUESTÃO 5
a) 0,185	a) 1000 b) 100000 c) 0,01 d) 0,000001	a) 125 b) -64 c) 0,0625 d) 8/27	a) -1/16 b) 10/81 c) 2,25 d) 289/16	a) 10^{22} b) $1{,}98*10^{-8}$ c) $9{,}84*10^{3}$ d) $5*10^{4}$

2

Cálculos algébricos

- Cálculo de produtos notáveis
- Racionalização de denominadores
- Quadrado da soma de três termos
- Fatoração de polinômios
- Fatoração da soma e da diferença de dois cubos

2.1. CÁLCULO DE PRODUTOS NOTÁVEIS

Esse produtos são multiplicações em que os fatores são polinômios. Veja alguns os tipos de produtos notáveis:

– **Quadrado da soma:** esses são do tipo $(x + a)(x + a) = (x + a)^2$

O nome quadrado da soma é dado porque a representação por potência desse produto é a seguinte:

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + xa + ax + a^2 = x^2 + 2xa + a^2$

Lê-se: “o quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo termo.”

Exemplo: $(x + 7)^2 = x^2 + 2x.7 + 49 = x^2 + 14x + 49$

– **Quadrado da diferença:** é dado por: $(x – a)(x – a) = (x – a)^2$

Esse produto pode ser escrito da seguinte maneira por meio da notação de potências:

$(x – a)^2 = (x – a)(x – a) = x^2 – xa – ax + a^2 = x^2 – 2xa + a^2$

Lê-se: “o quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo termo.”

Exemplo: $(x – 3)^2 = x^2 – 2x.3 + 9 = x^2 -6x + 9$
– **Produto da soma pela diferença:** é dado por: $(x + a)(x – a) = (x + a)(x – a) = x^2 – a^2$

Vejamos um exemplo:

$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

Lê-se: “O quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.”

Exercícios:

1. Desenvolva:

a) $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2.3x.y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

b) $(5 + x)^2 = 5^2 + 2.5.x + x^2 = 25 + 10x + x^2$

2. Simplifique as expressões:

a) $(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$

b) $(x - y)^2 - (x + y)^2$

Primeiramente:

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Assim,

$(x - y)^2 - (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2$
$= x^2 - x^2 - 2xy - 2xy + y^2 - y^2 = -2xy - 2xy = -4xy$

3. Efetue as multiplicações:

a) $(x - 2).(x - 5) = x.x + x(-5) + (-2)x + (-2).(-5) = x^2 + ((-2) + (-5))x + (-2).(-5)$

$= x^2 - 7x + 10$

b) $(x + 15).(x - 4) = x.x + x(-4) + 15x + 15(-4) = x^2 + (15 + (-4))x + 15.(-4) = x^2 + 11x - 60$

2.1.1. Exercício de produtos notáveis

1. Calcule os produtos notáveis:

a) $\left(4+\sqrt{2}\right)^2\left(4+\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{7}+5\right)^2\left(\sqrt{7}+5\right)^2$

c) $\left(3-\sqrt{3}\right)^2\left(3-\sqrt{3}\right)^2$

d) $\left(2\sqrt{2}+3\right)^2\left(2\sqrt{2}+3\right)^2$

2. Em quais dos itens abaixo o resultado é um número racional? Calcule cada um deles.

a) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(2+3\sqrt{7}\right)\left(2-3\sqrt{7}\right)\left(2+3\sqrt{7}\right)\left(2-3\sqrt{7}\right)$

c) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$

3. Desenvolva os seguintes produtos:

a) $(x+2)^2(x+2)^2$

b) $(2x+1)^2(2x+1)^2$

c) $(x^2+4)^2(x^2+4)^2$

d) $(x-5)^2(x-5)^2$

4. Desenvolva os seguintes produtos:

a) $(3x-2)^2(3x-2)^2$

b) $(2x+1)(2x-1)(2x+1)(2x-1)$

c) $(4x+\sqrt{2})(4x-\sqrt{2})(4x+\sqrt{2})(4x-\sqrt{2})$

d) $(x^4+2)(x^4-2)(x^4+2)(x^4-2)$

5. Calcule:

a) $\sqrt{2}(3+\sqrt{2})\sqrt{2}(3+\sqrt{2})$

b) $2\sqrt{5}(1-3\sqrt{5})\sqrt{5}(1-3\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+3)$

$(1-\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})$

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
a) $18+8\sqrt{2}$ b) $31+10\sqrt{7}$ c) $12-6\sqrt{3}$ d) $17+12\sqrt{2}$	a) $30+12\sqrt{6}$ b) -59 c) 6	a) x^2+4x+4 b) $4x^2+4x+1$ c) x^4+8x^2+16 d) $x^2-10x+25$	a) $9x^2-12x+4$ b) $4x^2-1$ c) $16x^2-2$ d) x^8-4	a) $3\sqrt{2}+2$ b) $2\sqrt{5}-30$ c) $6+4\sqrt{3}$ d) $5-3\sqrt{2}$

3

Equações

- Equação do 2º grau
- Fórmula de bhaskara
- Soma e produto de raízes
- Equações Forma fatorada do trinômio do 2º grau
- Equações biquadradas
- Sistemas de equações
- Equações fracionárias e irracionais

3.1. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Essa equação é um polinômio, do tipo: ax^2+bx+c, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Nesse tipo de equação o objetivo é achar o valor de x.

Exemplos:

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow a = 2;\ b = 4$ e $c = -6$

$x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow a = 1;\ b = -5$ e $c = 2$

$0{,}5x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow a = 0{,}5;\ b = 1$ e $c = -1$

$2x^2 - 4 = 0 \rightarrow a = 2;\ b = 0$ e $c = -4$

$-x^2 + 3x = 0 \rightarrow a = -1;\ b = 3$ e $c = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow a = 1;\ b = 0$ e $c = 0$

Como resolver equações de 2º grau?

A solução de uma equação do 2º grau ocorre, quando as raízes são encontradas, ou seja, os valores atribuídos a x . Esses valores de x devem tornar a igualdade verdadeira, isto é, ao substituir o valor de x na expressão, o resultado deve ser igual a 0.

→ **Exemplo**

$x^2 - 1 = 0$

$x' = 1$ e $x'' = -1$

Veja:

$x^2 - 1 = 0$

$(1)^2 - 1 = 0$ e $(-1)^2 - 1 = 0$

– Método de solução para equações do tipo $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Exemplo:

$3x^2 - 27 = 0.$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{3}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x' = 3; \quad x'' = -3$$

– Método de solução para equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + bx = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x = 0$ ou $ax + b = 0$

Assim, a solução da equação é dada por:

$$x' = 0 \quad ou \quad x = \frac{-b}{a}$$

Exemplo:

$5x^2 - 45x = 0$

$$5x^2 - 45x = 0$$

$$5x \cdot (x - 9) = 0$$

$$5x = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x'' = 9$$

3.1.1. Exercício de equação do 2° grau

1. Os 40 alunos de uma sala sentam-se em n fileiras de carteiras, cada uma com n+3 carteiras. Se não sobra cadeira vazia, quantos alunos há em cada fileira?

2. Resolva as equações:
   a. $x^2 - 4 = 0$
   b. $x^2 = 9$
   c. $4^2 - 25 = 0$
   d. $9x^2 = 16$

3. Resolva as equações:
   a. $x^2 - 2x = 0$
   b. $x^2 + 5x = 0$
   c. $3x^2 - x = 0$
   d. $2x^2 + x = 0$

4. Determine as raízes das equações por meio da soma e produto. Confira mentalmente se estão corretas, substituindo-as na equação.
   a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
   b. $x^2 + 8x + 15 = 0$
   c. $x^2 - 6x + 8 = 0$
   d. $x^2 - x - 6 = 0$

5. Resolva as equações, completando quadrados.
   a. $x^2 + 6x + 2 = 0$
   b. $x^2 - 10x + 14 = 0$
   c. $x^2 - 2x - 2 = 4$
   d. $x^2 + 4x - 16 = 0$

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
8	a) -2;2 b) -3;3 c) -5/2;5/2 d) -4/3;4/3	a) 0; 2 b) 0; -5 c) 0; ⅓ d) 0; -½	a) 3 e 2 b) -3 e -5 c) 4 e 2 d) 3 e -2	a) $-3 \pm \sqrt{7}$ b) $5 \pm \sqrt{11}$ c) $1 \pm \sqrt{3}$ d) $-2 \pm 2\sqrt{5}$

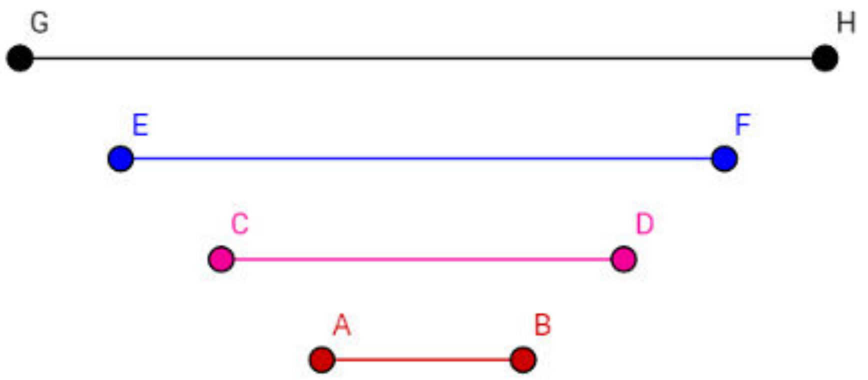
4

- **Triângulos**
  - Razão e proporção de segmentos
  - Teorema de Tales
  - Semelhança de triângulos
  - Casos de semelhanças de triângulo
  - Relações métricas no triângulo retângulo
  - Teorema de Pitágoras
  - Razões trigonométricas
  - Seno, Cosseno e Tangente
  - Lei dos cossenos
  - Lei dos senos

4.1. RAZÃO E PROPORÇÃO DE SEGMENTOS

– Segmentos proporcionais

As medidas entre segmentos de reta são proporcionais quando a razão entre essas medidas, seguindo uma ordem preestabelecida, tem o mesmo resultado.



Segmentos, dois a dois, cujas razões são iguais

Se a razão entre os números reais A e B tiver como resultado o número C, escreveremos:

$$\frac{A}{B} = C$$

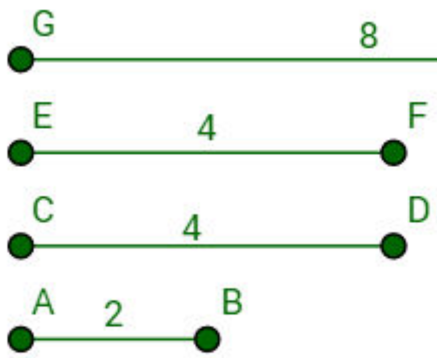
Exemplo:
Uma pessoa de 1,8 m de altura possui uma sombra de 1 metro, e uma árvore de 3,6 m de altura possui uma sombra de 2 metros. Elas serão proporcionais?

Solução: Fazendo a razão entre as grandezas teremos:

$$\frac{1,8}{1} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

Como o valor é uma constante, elassão proporcionais.

Agora vamos ver para o segmento de reta. Ao dividir as medidas entre dois segmentos de reta, obteremos a razão entre eles.

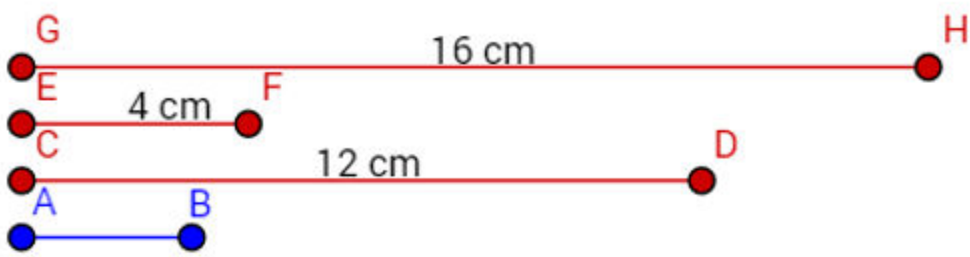


Os segmentos AB, CD, EF e GH são proporcionais porque:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = 0,5$$

Exemplos:

1 – Observe o segmento. Qual o valore de AB?



Solução:

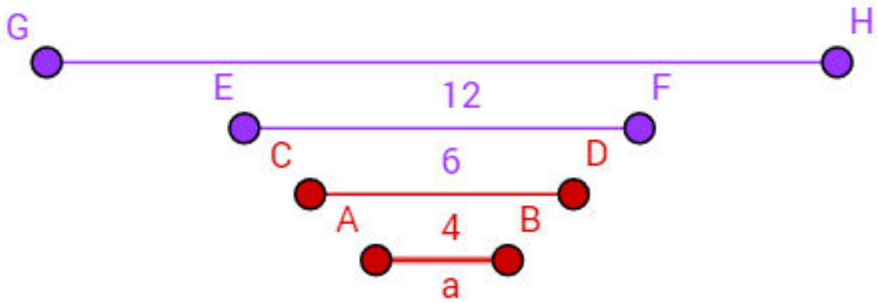
$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Substitua as medidas:

$$\frac{AB}{12} = \frac{4}{16}$$

$$AB = 3$$

2 – Sabendo que os segmentos AB, CD, EF e GH, nessa ordem, são proporcionais, determine a medida do segmento AB. Calcule o valor de a.



Solução:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{6}{12}$$

12a = 24 > a = 24/ 12 > a = 2

3 – Os segmentos AB, CD, EF e GH são proporcionais. Sabendo que as medidas dos segmentos AB, CD e EF são 10 cm, 15 cm e 20 cm respectivamente, calcule a medida do segmento GH.

Solução: Na ordem em que os segmentos foram apresentados, a proporção é a seguinte:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Substituindo os comprimentos dos três segmentos que foram dados, teremos:

$$\frac{10}{15} = \frac{20}{GH}$$

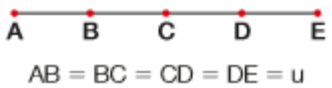
4.1.1. Exercício de razão e proporção de segmentos

1. Se M é o ponto médio de um segmento $\underline{AB}$, determine a razão $\frac{AM}{BN}$

2. Sabendo que AB=10 cm, RS=16 cm e PQ=30 cm, determine as razões:

   a. $\frac{AB}{RS}$
   b. $\frac{RS}{AB}$
   c. $\frac{RS}{PQ}$
   d. $\frac{PQ}{AB}$

3. Na figura, os segmentos $AB, BC, CD\ e\ DE$ são congruentes.



   Estabeleça as razões:

   a. $\frac{AB}{BC}$
   b. $\frac{AB}{BE}$
   c. $\frac{AC}{CE}$
   d. $\frac{AD}{AB}$

4. Os segmentos AB e CD são proporcionais aos segmentos CD e EF, respectivamente. Se AB=2 cm e EF=8 cm, determine a medida de CD.

5. A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{5}{2}$. Se a base mede 15 m, determine o perímetro do retângulo.

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
1/2	a) $\frac{5}{8}$ b) 8/5 c) 8/15 d) 3	a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) 1 d) 3 e) $\frac{1}{4}$	4 cm	42 cm

5

Polígonos

- Área do retângulo
- Área do paralelogramo
- Área do triângulo
- Área do losango e trapézio
- Polígonos regulares
- Polígonos inscritos e circunscritos
- Elementos notáveis de um polígono regular
- Apótema de polígonos regulares
- Comprimento da circunferência
- Arco da circunferência
- Área do Círculo
- Área do Setor Circular
- Volume do Prisma e do Cilindro

5.1. ÁREA DO RETÂNGULO

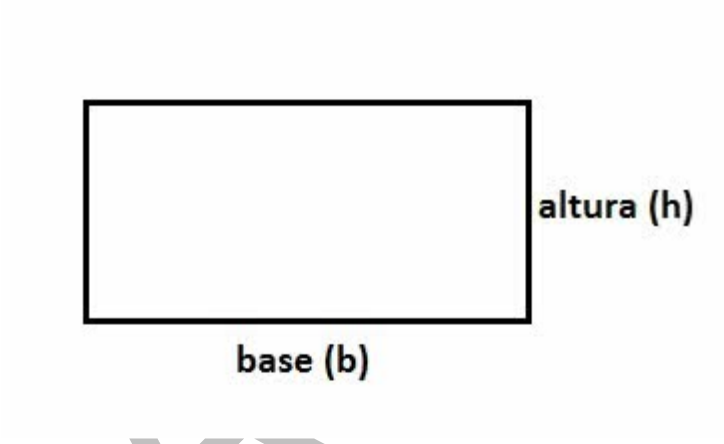
Um retângulo é uma figura de um quadrilátero cujos ângulos internos são todos retos. São formados por segmentos de reta que não se cruzam, além de não possuírem qualquer abertura. O retângulo é uma figura geométrica plana, ou seja, sempre existe um plano que contém todos os pontos de um retângulo.

Ele possui quatro ângulos internos de 90° chamados de ângulos retos. Assim, a soma dos ângulos internos dos retângulos totalizam 360°.

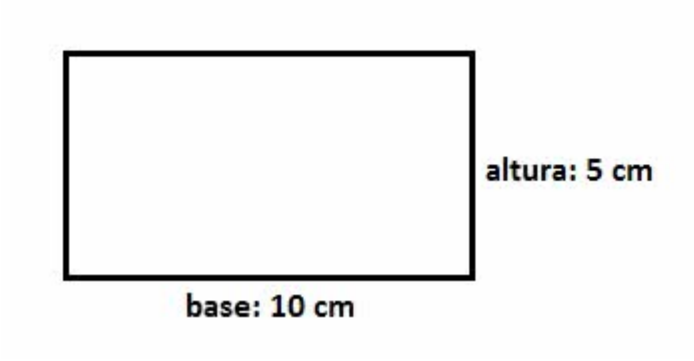
A área do retângulo corresponde ao produto (multiplicação) da medida da base pela altura da figura, sendo expressa pela fórmula:

A = b x h

Onde, A: área, b: base e h: altura



Vamos ver um exemplo de como calcular a área de um retângulo:



Solução:

$A = b \times h$
$A = 10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$
$A = 50\text{ cm}^2$

O valor da área da figura é de 50 cm^2.

Perímetro do Retângulo

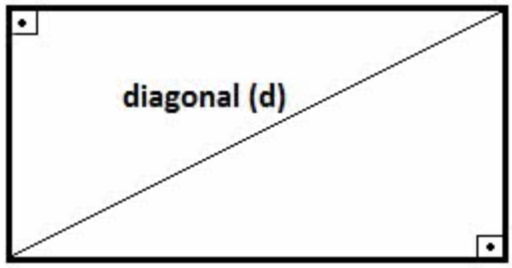
O perímetro corresponde a soma de todos os lados.

Vamos calcular o perímetro do retângulo abaixo:

Solução:
10 + 10 + 5 + 5 = 30.

Diagonal do Retângulo

A linha que une dois vértices não consecutivos de um retângulo é chamada de diagonal. Veja o exemplo abaixo:



O cálculo da diagonal do retângulo é feito através do Teorema de Pitágoras, onde o valor do quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados de seus catetos.

$d^2 = b^2 + h^2$

Onde: d: diagonal, b: base e h: altura.

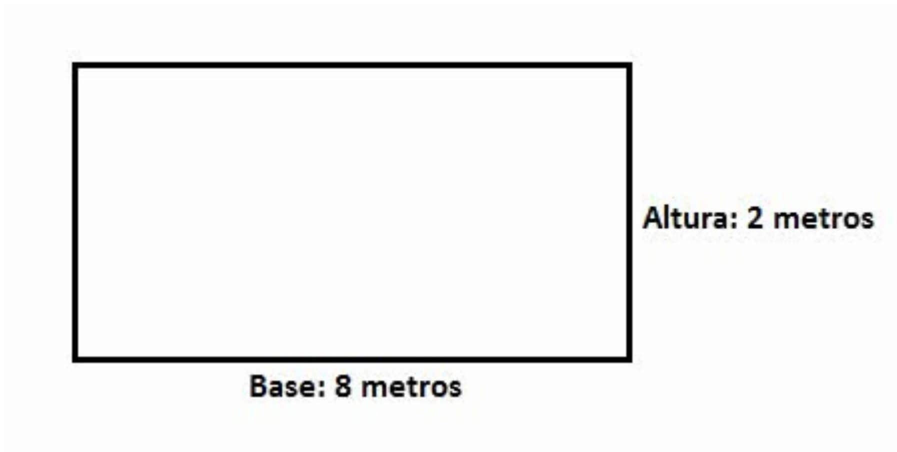
Exemplo: Em um retângulo de base 10 cm e altura de 5 cm, temos:

Solução:

$$d^2 = b^2 + h^2$$
$$d^2 = (10\ cm)^2 + (5\ cm)^2$$
$$d^2 = 100\ cm^2 + 25\ cm^2$$
$$d^2 = 125\ cm^2$$
$$d = \sqrt{125\ cm^2}$$
$$d = \sqrt{5^2 \times 5} \quad (\text{pois } 5 \times 5 \times 5 = 5^2 \times 5 = 125)$$
$$d = 5\sqrt{5}$$

Exercícios Resolvidos:

1 -Calcule a área de um retângulo com base de 8 m e altura de 2 m.



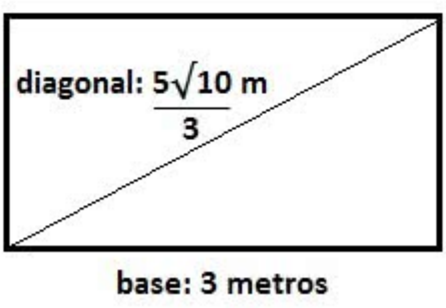
Solução:

$A = b \times h$

$A = 8\ m \times 2\ m$

$A = 16\ m^2$

2 – Calcule a área de um retângulo apresentado abaixo:



Solução:

$$d^2 = b^2 + h^2$$

$$\left(\frac{5\sqrt{10}}{3}\right)^2 = 3^2 + h^2$$

$$\frac{5\sqrt{10}}{3} \times \frac{5\sqrt{10}}{3} = 9 + h^2$$

$$\frac{5 \times 5\sqrt{10 \times 10}}{3 \times 3} = 9 + h^2$$

$$\frac{25\sqrt{100}}{9} = 9 + h^2$$

$$\frac{25 \times 10}{9} = 9 + h^2$$

$$\frac{250}{9} = 9 + h^2$$

$$250 = 81 + 9h^2$$

$$250 - 81 = 9h^2$$

$$169 = 9h^2$$

$$h^2 = \frac{169}{9}$$

$$h = \sqrt{\frac{169}{9}}$$

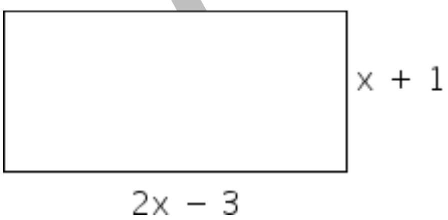
$$h = \frac{13}{3}$$

$$A = b \times h$$

$$A = 3\,m \times \frac{13}{3}\,m$$

$$A = 13\,m^2$$

3 – Observe o retângulo a seguir e escreva o polinômio que representa a área da figura. A seguir, calcule o valor da área quando x = 4.



Solução:

$A = (2x - 3)(x + 1)$

$A = 2x.x + 2x.1 - 3.x - 3.1$

$A = 2x^2 + 2x - 3x - 3$

$A = 2x^2 - x - 3$

$A = (2x - 3)(x + 1)$

$A = 2x.x + 2x.1 - 3.x - 3.1$

$A = 2x^2 + 2x - 3x - 3$

$A = 2x^2 - x - 3$

Agora, substituímos o valor de x por 4 e calculamos a área.

$A = 2.(4)^2 - 4 - 3$

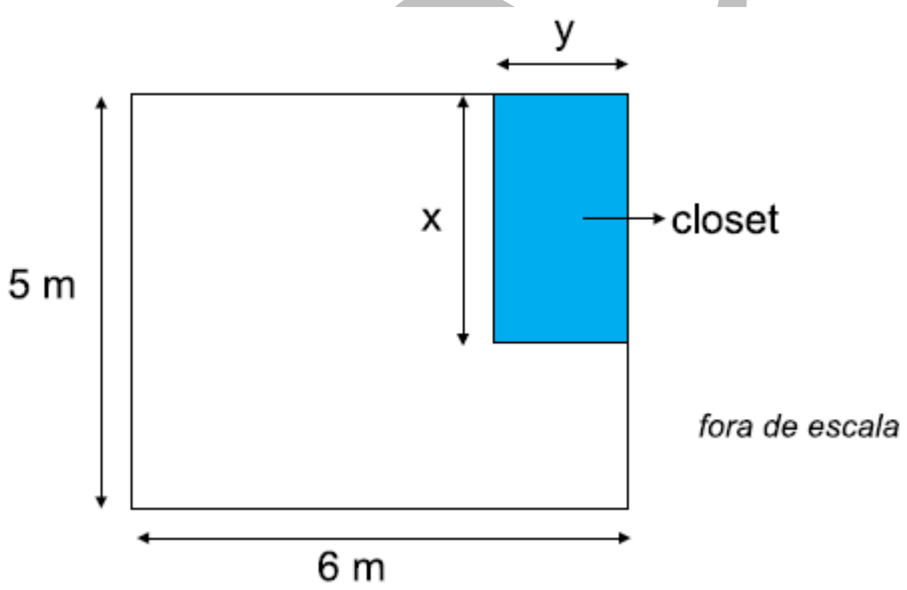
$A = 2.16 - 7$

$A = 32 - 7$

$A = 25$

Logo, quando temos x = 4, a área é 25 unidades.

4 – Uma pessoa possui um quarto retangular com 5 m de largura por 6 m de comprimento e quer utilizar parte da área do quarto para fazer um closet (pequeno cômodo usado como quarto de vestir), também retangular conforme mostra a figura.



Sabendo que y corresponde a 1/4 do comprimento do quarto, para que a área do closet seja de 4,5 m^2, a largura x, em metros, deverá ser de:

a) 2,0.

b) 2,5.

c) 3,0.

d) 3,5.

e) 4,0.

Solução:

Como y é a quarta parte do comprimento do quarto, então y é igual a 6 dividido por 4. Desse modo, y = 1,5 m.

A = b·h

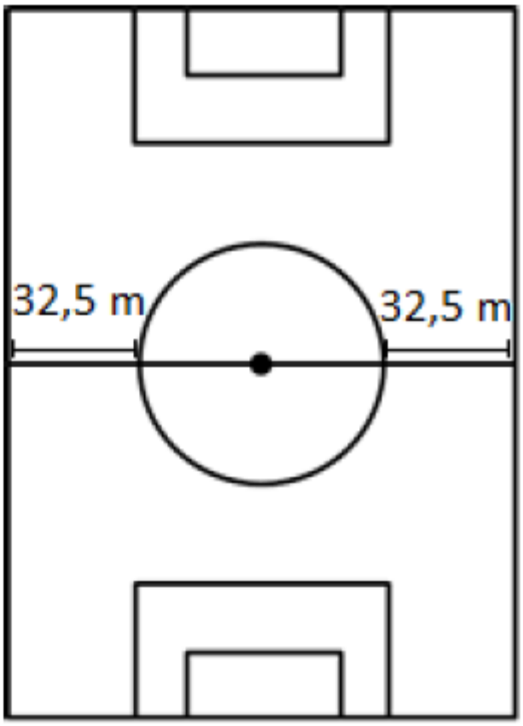
4,5 = 1,5·h

$h = \frac{4,5}{1,5}$

h = 3

Logo, x = 3 m

5 – Um campo de futebol tem o formato de um retângulo de comprimento (2x+20) metros e largura (x+45) metros, conforme a figura ao lado. Sabendo que a área desse campo é de 8500 m^2, assinale a alternativa que indica CORRETAMENTE a medida do raio do círculo central:



a) 10 m

b) 15 m

c) 20 m

d) 25 m

e) 30 m

Solução:

$(2x+20)(x+45) = 8500$
$2x^2 + 90x + 20x + 900 = 8500$

$2x^2 + 110x + 900 – 8500 = 0$

$2x^2 + 110x – 7600 = 0$

Utilizando a fórmula de Bhaskara:

$\Delta = 110^2 – 4 \cdot 2 \cdot (– 7600)$

$\Delta = 12100 – 60800$

$\Delta = 72900$

$x =(–110 \pm \sqrt{72900})/ 2 \cdot 2$

$x = (–110 \pm 270)/ 4$

$x = 160/ 4$

$x = 40$

As dimensões desse campo de futebol são:

Largura: $x + 45 = 40 + 45 = 85$ metros.

Comprimento: $2x + 20 = 2 \cdot 45 + 20 = 90 + 20 = 110$ metros.
A largura do campo é justamente o diâmetro do círculo (d) somado a 32,5 metros duas vezes, isto é:

$85 = 2 \cdot 32{,}5 + d$

$85 = 65 + d$

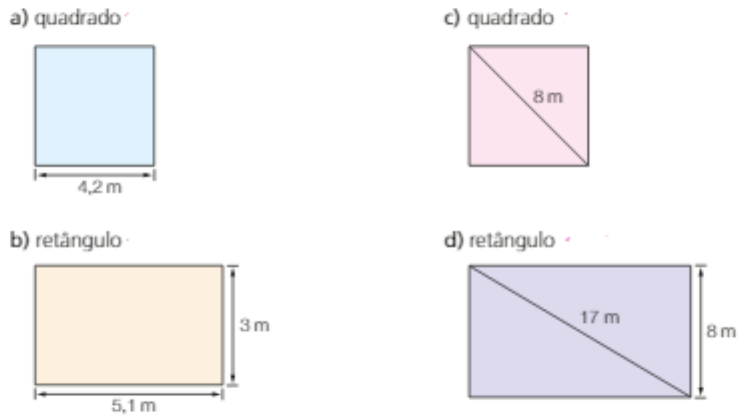
$d = 85 – 65$

$d = 20$

Como o diâmetro é igual a duas vezes o raio, então o raio desse círculo é 10 metros.

5.1.1. Exercício de área do retângulo

1. Determine a área da figura em cada um dos itens a seguir.



2. Determine a área do retângulo nos casos a seguir, considerando o metro como unidade de medida.

3. A área de um retângulo é $40cm^2$, e sua base excede em 6 cm sua altura. Determine a altura do retângulo.

4. O perímetro de um retângulo é 42 cm, e a base mede 5 cm a mais do que a altura. Calcule a área do retângulo.

5. Se aumentamos em 3 cm os lados de um quadrado, sua área aumentará em 261 cm^2 . Quanto mede cada lado do quadrado?

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
a) 17,64 cm² b) 15,3 cm² c) 32 m² d) 120 m²	a) $48\sqrt{3}$m² b) $8\sqrt{3}$m²	4 cm	12 cm; 6 cm	42 cm

6

Estatística e probabilidade

- Distribuição de frequências
- Medidas de dispersão
- Princípio multiplicativo
- Probabilidade condicional

6.1. DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

A distribuição de frequência é um arranjo tabular dos dados com a frequência correspondente. As tabelas de frequência servem de base para as representações gráficas.

Nesse tipo de estudo teremos dois tipos de frequência: a frequência absoluta que corresponde ao dado bruto informado pela pesquisa em questão. Ela informa apenas a quantidade de vezes que determinado fenômeno ocorre, sendo normalmente um dado preliminar de uma investigação. Já a frequência relativa o resultado obtido da divisão entre a frequência absoluta – o valor que é observado na população – e a quantidade de elementos da amostra.

Vamos ver como fazer a construção de uma tabela assim, vejam os exemplos:

1. A estatura dos estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola está descrita na lista a seguir:

1,66	1,60	1,61	1,50	1,62	1,60	1,65
1,67	1,64	1,60	1,62	1,61	1,68	1,63
1,56	1,73	1,60	1,55	1,64	1,68	1,55
1,52	1,59	1,63	1,60	1,55	1,55	1,69
1,51	1,66	1,70	1,64	1,54	1,61	1,56
1,72	1,53	1,57	1,56	1,58	1,58	1,61

De acordo com os dados encontrados, podemos afirmar que:

A) Há 7 pessoas com altura superior a 1,67.
B) A frequência absoluta da altura de 1,55 é 4.

C) A frequência absoluta de alturas iguais ou menores que 1,70 é 3.

D) A frequência absoluta de alturas menores que 1,60 é 14.

Solução:

Para resolver, primeiro colocaremos os dados em ordem para facilitar a análise das alternativas:

1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,55
1,55	1,55	1,56	1,56	156	1,57	1,58
1,58	1,59	1,60	1,60	1,60	1,60	1,60
1,61	1,61	1,61	1,61	1,62	1,62	1,63
1,63	1,64	1,64	1,64	1,65	1,66	1,66
1,67	1,68	1,68	1,69	1,70	1,72	1,73

Com os dados em ordem, é mais fácil verificar que a frequência absoluta da altura de 1,55 é igual a 4, pois esse dado se repete 4 vezes.

2 – Durante as eleições do conselho de uma fábrica, um trabalhador decidiu realizar uma pesquisa com os 250 funcionários, que responderam se votarão no candidato A, B ou C. Depois da coleta de dados, esse funcionário constatou que 70 pessoas votariam no candidato A, 92 pessoas, no candidato B, 53, no candidato C, e os demais disseram que não votariam em nenhum dos três candidatos.

Solução: Com base nesses dados, podemos calcular a frequência relativa de cada uma das respostas possíveis.

Para encontrar a quantidade de pessoas que não votariam em nenhum dos candidatados, temos que:

250 – 70 – 92 – 53 = 35

Então, as respostas obtidas foram:

Candidato A: 70 votos

Candidato B: 92 votos

Candidato C: 53 votos

Nenhum dos candidatos: 35 votos

Total de funcionários consultados: 250

Para encontrar a frequência relativa de cada uma das respostas obtidas, dividimos a quantidade de votos pelo total de funcionários consultados.

Candidato A: 70 ÷ 250 = 0,28 → 28%

Candidato B: 92 ÷ 250 = 0,368 → 36,8%

Candidato C: 53 ÷ 250 = 0,212 → 21,2%
Nenhum dos candidatos: 35 ÷ 250 = 0,14 → 14%

Podemos representar a frequência relativa por meio de uma tabela:

Candidato	Frequência relativa	Frequência relativa (%)
A	0,28	28%
B	0,368	36,8%
C	0,212	21,2%
Nenhum	0,14	14%
Total	**1**	**100%**

3 – Com a intenção de compreender melhor o fluxo de correntes ao decorrer de uma semana, o número de clientes que uma empresa atendeu nesse período foi anotado na lista a seguir:

Segunda-feira: 10 clientes

Terça-feira: 11 clientes

Quarta-feira: 8 clientes

Quinta-feira: 16 clientes

Sexta-feira: 25 clientes

Sábado: 30 clientes

De acordo com as quantidades encontradas, construa a tabela frequência da quantidade de clientes atendidos por dia ao longo da semana.

Solução:

Dia da semana	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa (%)
Segunda-feira	16	16 : 150 = 0,11	11%
Terça-feira	15	15 : 150 = 0,10	10%
Quarta-feira	12	12 : 150 = 0,08	8%
Quinta-feira	20	20 : 150 = 0,13	13%
Sexta-feira	37	37 : 150 = 0,25	25%
Sábado	50	50 : 150 = 0,33	33%
Total	**150**	**100 : 100 = 1**	**100%**

6.1.1. Exercício de distribuição de frequências

1. Calcule a nota média dos alunos a partir da tabela de frequência abaixo.

6,7	8,0	4,5	6,8	5,8
8,3	3,7	8,2	5,5	6,5
8,3	6,5	10,0	6,5	8,1
4,0	9,5	9,5	7,2	3,5
7,5	4,5	4,5	3,4	9,6
4,4	7,3	5,1	6,9	8,5
6,0	7,5	10,0	5,0	7,1
5,9	3,0	6,5	7,3	5,2
5,4	3,5	8,1	4,5	6,5
6,5	7,3	6,0	5,0	7,4

Nota	Frequência (nº de alunos)	Frequência relativa
3,0 ⊢ 4,0		
4,0 ⊢ 5,0		
5,0 ⊢ 6,0		

2. Determine a média, a mediana e a moda do número de gols do Flamengo por partida.

0, 1, 0, 4, 0, 0, 0, 1, 3, 2, 5, 3, 0, 3, 4, 5, 4, 0, 3, 0

3. Calcule a média, a mediana e a moda das notas de uma prova de matemática que valia 4 pontos.

3, 2, 2, 1, 4, 1, 0, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 0, 4, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 4, 0, 2, 2, 4, 3, 0, 2, 2, 2, 3, 2, 2.

4. Qual é o salário médio dos funcionários? E o mediano? Qual é a moda?

Salário dos funcionários

Salário (R$)	Frequência
1.000,00	3
1.300,00	10
1.700,00	5
2.200,00	4
4.000,00	2
7.000,00	1

5. Em distribuições de frequências por classes (intervalos), para obter a média consideramos os pontos médios das classes com as respectivas frequências.

Complete a tabela a seguir com os valores corretos de ponto médio e produto. Em seguida, calcule o tempo médio gasto pelos candidatos.

Tempo (min)	Ponto médio	Nº de candidatos	Produto
100 ⊢ 120	110	12	1 320
120 ⊢ 140	130	20	2600
140 ⊢ 160		16	
160 ⊢ 180		14	
180 ⊢ 200		8	
200 ⊢ 220		6	
220 ⊢ 240		4	
Soma		80	

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
6,54	1,9; 1,5; 0	2,2;2,2	R$ 1932,00; R$ 1300,00; R$ 1300,00	155 min

7

Funções

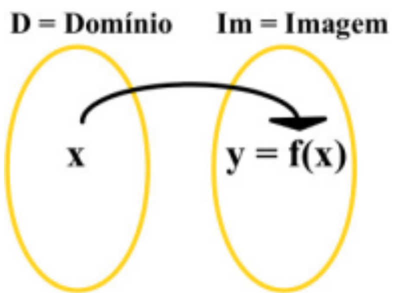
- Noção de função
- Função do 1° grau
- Função do 2° grau

7.1. NOÇÃO DE FUNÇÃO

A função determina uma relação entre os elementos de dois conjuntos. Podemos defini-la utilizando uma lei de formação, em que, para cada valor de x, temos um valor de f(x). Chamamos x de domínio e f(x) ou y de imagem da função.

Seja X um conjunto com elementos de x e Y um conjunto dos elementos de y, temos que:

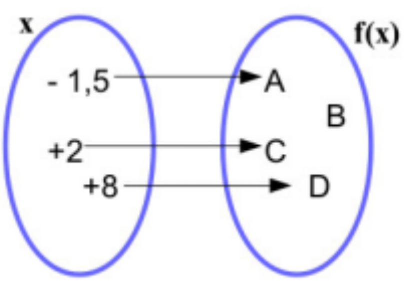
f: x → y



Cada elemento do conjunto x é levado a um único elemento do conjunto y.

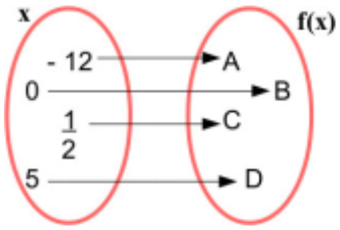
Tipos de funções

– Função injetora ou injetiva: nessa função, cada elemento do domínio (x) associa-se a um único elemento da imagem f(x), mas podem existir elementos do contradomínio que não são imagem.



– Função sobrejetora ou sobrejetiva: todos os elementos do domínio possuem um elemento na imagem.

– Função bijetora ou bijetiva: é ao mesmo tempo **injetora** e sobrejetora, pois, cada elemento de x relaciona-se a um único elemento de f(x). Veja o exemplo abaixo:



As funções podem ser representadas graficamente. Nele temos: a coordenada x é chamada de abscissa e a y, de ordenada.

1 – Função constante: todo valor do domínio (x) tem a mesma imagem (y).

Fórmula geral da função constante:

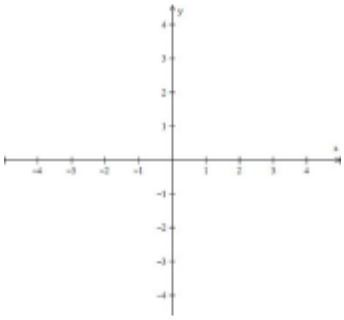
f(x) = c

x = Domínio
f(x) = Imagem

c = constante, que pode ser qualquer número do **conjunto dos reais**.

Exemplo de gráfico da função constante: f(x) = 2

As funções podem ser representadas graficamente. Nele temos: a coordenada x é chamada de abscissa e a y, de ordenada.



1 – Função constante: todo valor do domínio (x) tem a mesma imagem (y).

Fórmula geral da função constante:

f(x) = c

x = Domínio

f(x) = Imagem

c = constante, que pode ser qualquer número do **conjunto dos reais**.

Exemplo de gráfico da função constante: f(x) = 2

2 – Função Par: é simétrica em relação ao eixo vertical, ou seja, à ordenada y. Entenda simetria como sendo uma figura/gráfico que, ao dividi-la em partes iguais e sobrepô-las, as partes coincidem-se perfeitamente.

Fórmula geral da função par:

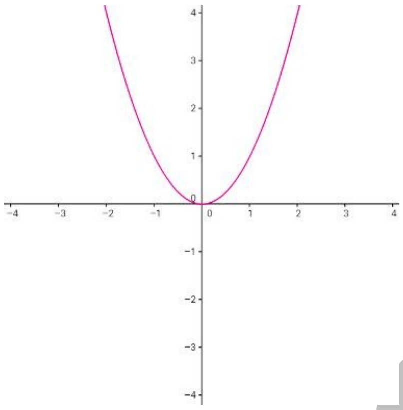
f(x) = f(- x)

x = domínio

f(x) = imagem

– x = simétrico do domínio

Exemplo de gráfico da função par: f(x) = x2



3 – Função afim ou polinomial do primeiro grau: o maior grau da variável x (termo desconhecido), que sempre deve ser igual a 1. Nessa função, o gráfico é uma reta. Além disso, ela possui: domínio x, imagem f(x) e coeficientes a e b.

Fórmula geral da função afim ou polinomial do primeiro grau

f(x) = ax + b

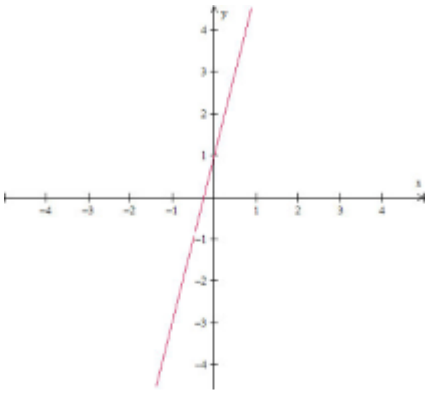
x = domínio

f(x) = imagem

a = coeficiente

b = coeficiente

Exemplo de gráfico da função polinomial do primeiro grau: f(x) = 4x + 1



4 – Função Linear

A função linear tem sua origem na função do primeiro grau (f(x) = ax + b). Trata-se de um caso particular, pois b sempre será igual a zero.

Fórmula geral da função linear

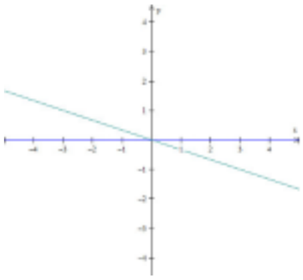
f(x) = ax

x = domínio

f(x) = imagem

a = coeficiente

Exemplo de gráfico da função linear: f(x) = -x/3



5 – Função crescente

A função polinomial do primeiro grau será crescente quando o coeficiente a for diferente de zero e maior que um (a > 1).

Fórmula geral da função crescente

f(x) = + ax + b

x = domínio

f(x) = imagem

a = coeficiente sempre positivo

b = coeficiente

6 – Função decrescente

Na função decrescente, o coeficiente a da função do primeiro grau (f(x) = ax + b) é sempre negativo.

Fórmula geral da função decrescente

f(x) = – ax + b

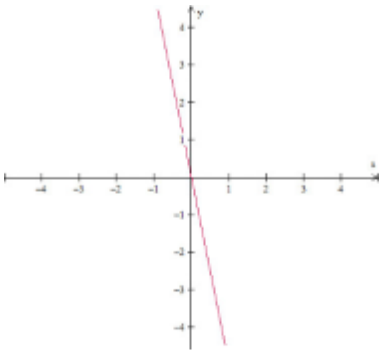
x= domínio/ incógnita

f(x) = imagem

– a = coeficiente sempre negativo

b = coeficiente

Exemplo de gráfico da função decrescente: f(x) = – 5x



Exercício:

1 – Uma função f de variável real satisfaz a condição f(x + 1) = f(x) + f(1), qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo que f(2) = 1, determine o valor de f(5).

Solução: x = 1
f(1+1) = f(1) + f(1)
f(2) = 2f(1)
2f(1) = f(2)
2f(1) = 1
f(1) = 1/2

x = 2
f(2+1) = f(2) + f(1)

$f(3) = 1 + 1/2$

$f(3) = 3/2$

$x = 3$

$f(3+1) = f(3) + f(1)$

$f(4) = 3/2 + 1/2$

$f(4) = 4/2$

$f(4) = 2$

$x = 4$

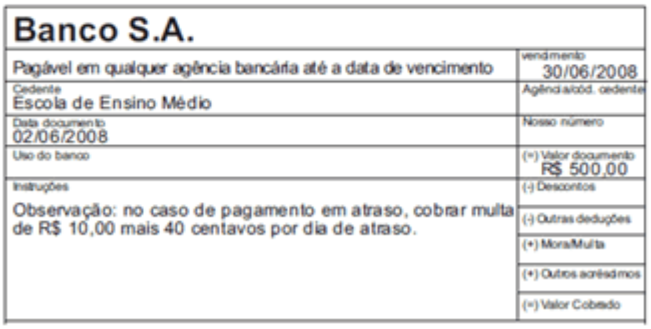
$f(4+1) = f(4) + f(1)$

$f(5) = 2 + 1/2$

$f(5) = 5/2$

O valor de f(5) na função é igual a 5/2.

i) A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola referente ao mês de junho de 2008.



Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Temos que M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, e x é o número de dias em atraso. Determine a função que oferece o valor do boleto para pagamento com atraso, e calcule o valor de uma mensalidade com 12 dias de atraso.

Solução: $M(x) = 500 + 10 + 0{,}40x$

$M(x) = 510 + 0{,}40x$

Valor da mensalidade após 12 dias de atraso:

M(x) = 510 + 0,40x

M(x) = 510 + 0,40 * 12

M(x) = 510 + 4,80

M(x) = 514,80

O valor da prestação decorrido 12 dias de atraso corresponde a R$ 514,80.

7.1.1. Exercício de noção de função

1. Dada a função $f(x)=3x^2-7x+15$, calcule $f(0)-f(1)+f(-1)$.

2. Dada a função $f(x)=\frac{1}{x+1}$, calcule, se existir:

    a. $f(-2)$
    b. $f(\frac{3}{5})$
    c. $f(\sqrt{3})$
    d. $f(-1)$

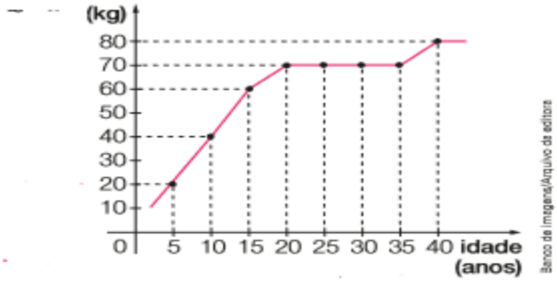
3. Um carro está viajando a 100 km por hora.

    a. Que distância ele percorre em 2 horas?
    b. Que distância ele percorre em 90 minutos?

4. Duas variáveis x e y, estão relacionadas pela fórmula $2x+5y=10$.

    a. Dado $x=8$, quanto vale y?
    b. y é função de x? Por quê?

5. O gráfico a seguir representa como sr. João Soares foi ganhando massa, desde que nasceu até sua idade atual. Analisando o gráfico, diga qual era a massa do sr. João:



a. Quando tinha 5 anos;
b. Aos 10 anos;
c. Aos 15 anos;
d. Dos 20 aos 35 anos.

GABARITO

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
29	a) -1 b) ⅝ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ d) não existe	a) 200 km b) 150 km	a) y=-4 b) x=-45	a) 20 kg b) 40 kg c) 60 kg d) 70 kg